به نام خدا

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

فصل سوم-تقریب خطی

تقریب خطی یک تابع، در واقع محاسبه مقدار تقریبی تابع در نقطه‌ای مانند x از روی خط مماس در نقطه‌ای مانند x_0 نزدیک x است. x_0 طوری انتخاب می‌شود که محاسبه مشتق و خط مماس در آن نقطه ساده باشد. به عبارت دیگر از تقریب

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

استفاده می‌کنیم.

فعالیت ۱.

الف) مقدار تقریبی $\sqrt[3]{1/012}$ را به روش تقریب خطی بدست آورید.

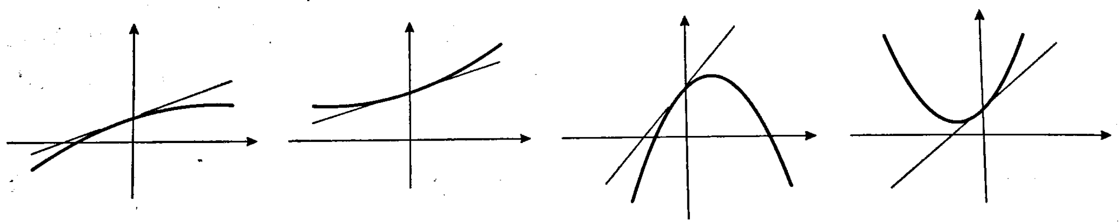
ب) فرض کنید $y = kx^n$ که k عددی ثابت است. اگر در محاسبه x حداکثر خطای نسبی r درصد باشد، حداکثر خطای نسبی در محاسبه y (به روش تقریب خطی) چقدر است؟

تعریف ۱. خطای نسبی، نسبت خطا به مقدار اصلی کمیت است. به طور مثال اگر در اندازه‌گیری طول میله‌ای به اندازه ۱۰ سانتی‌متر، ۰/۱ سانتی‌متر خطا داشته باشیم، آنگاه خطای نسبی برابر است با $\frac{0/1}{10}$.

همیشه در تقریب زدن باید میزان دقت تقریب مشخص باشد. به طور مثال در روش تقریب خطی باید بدانیم که مقدار خطا، $E(x_0, h) = |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)h|$، که در آن $h = x - x_0$، چقدر است.

فعالیت ۲.

الف) در کدام یک از شکل‌های زیر تقریب خطی خطای بیشتری دارد؟



(الف) (ب) (پ) (ت)

ب) به نظر شما، خطا در تقریب خطی به چه کمیتی از f وابسته است؟

در واقع بعد از تعریف مشتق دوم تابع، می‌توان گزاره ۳ را در مورد خطا در روش تقریب خطی بیان کرد.

تعریف ۲. فرض کنید تابع $f : S \to \mathbb{R}$ در نقاط زیرمجموعه‌ای از S مانند S' مشتق‌پذیر است، یعنی تابع $f' : S' \to \mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر a نقطه‌ای درونی از S' باشد و مشتق f' در نقطه a وجود داشته باشد، آن را مشتق دوم f در نقطه a می‌نامیم و با $f''(a)$ نمایش می‌دهیم.

اگر $y = f(x)$، با استفاده از شیوه نمادگذاری لایب‌نیتس، $f''(x)$ با $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ یا به اختصار $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ نمایش داده می‌شود.

گزاره ۳ (تخمین خطای تقریب خطی)**.** فرض کنید تابع $f : S \to \mathbb{R}$ روی بازه‌ای شامل نقطه a مشتق‌های اول و دوم داشته باشد. در این صورت، اگر نقطه $a+h$ نقطه‌ای متمایز از a در این بازه باشد، نقطه‌ای مانند c بین a و $a+h$ وجود دارد که

$$f(a+h) - (f(a) + f'(a)h) = \frac{۱}{۲} f''(c)h^۲.$$

می‌توان گزاره ۳ را شبیه قضیه مقدار میانگین بیان کرد.

گزاره ۴ (همتای قضیه مقدار میانگین برای مشتق دوم)**.** فرض کنید I یک بازه باز و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که روی I مشتق‌های اول و دوم دارد و a و b دو نقطه در I باشند که $a < b$. در این صورت، نقطه‌ای مانند c وجود دارد که $a < c < b$ و

$$f(b) - (f(a) + f'(a)(b-a)) = \frac{۱}{۲} f''(c)(b-a)^۲.$$

فعالیت ۳.

الف) گزاره زیر را ثابت کنید.

گزاره ۵ (همتای قضیه رُل برای مشتق دوم)**.** فرض کنید I یک بازه و تابع $f : I \to \mathbb{R}$ روی I مشتق‌های اول و دوم داشته باشد. همچنین، فرض کنید a و b دو نقطه I باشند که $a < b$، $f(a) = f(b) = ۰$ و $f'(a) = ۰$. در این صورت، نقطه‌ای مانند c وجود دارد که $a < c < b$ و $f''(c) = ۰$.

مانند اثبات قضیه مقدار میانگین که از قضیه رُل برای اثباتش استفاده می‌کردیم؛ در اینجا نیز برای اثبات گزاره ۴ از گزاره ۵ استفاده می‌کنیم. برای این منظور تنها باید تابعی مانند $\phi(x)$ را از تابع $f(x)$ کم کنیم تا تابع جدید $g(x)$ را بدست آوریم که در شرایط گزاره ۵ صدق کند. چون باید سه شرط در مورد تابع $g(x)$ برقرار باشد، می‌توان تابع $\phi(x)$ را یک چندجمله‌ای درجه ۲ در نظر گرفت که سه درجه آزادی دارد. پس می‌نویسیم

$$g(x) = f(x) - [Ax^۲ + Bx + C].$$

ب) A، B و C را طوری تعیین کنید که تابع $g(x)$ در شرایط گزاره ۵ صدق کند.

ج) با استفاده از گزاره ۵ برای تابع $g(x)$، حکم گزاره ۴ را نتیجه بگیرید.

فعالیت ۴.

الف) در تقریب فعالیت ۱ قسمت (ب)، حداکثر خطا در تقریب خطی $\sqrt[۳]{۱/۰۱۲} \approx ۱/۰۰۴$ را بدست آورید.

ب) نشان دهید برای تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$، مقدار تقریبی همیشه بزرگ‌تر از مقدار واقعی است.

ج) توجیهی بیاورید که اگر h مثبت باشد مقدار خطا کمتر از زمانی است که h منفی باشد.